

Colles de Maths - semaine 6 - MP*1
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 (*) Etudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t} + \cos t} dt$

Exercice 2 (*) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b pour que l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^a)}{x^b} dx.$$

Exercice 3 (*) Pour quels réels α la fonction

$$f : x \mapsto x^\alpha \int_0^x \sqrt{\frac{t}{1+t^2}} dt$$

est-elle intégrable sur \mathbb{R}_+^* ?

Exercice 4 (**) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que f et f'^2 sont intégrables. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 5 (**)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) \neq 0$. Pour $t \geq 0$, on définit

$$g(t) = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+tx} dx.$$

Donner un équivalent en $+\infty$ de g .

Exercice 6 (***) Soit $n \geq 2$ et $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n$ des réels. On définit pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$,

$$\phi(x) = \frac{\prod_{i=1}^n (x - a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (x - b_i)}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support bornée. Montrer qu'alors $f \circ \phi$ l'est également et vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} f \circ \phi = \int_{\mathbb{R}} f.$$